Πρόχειρες σημειώσεις διαλέξεων

11η Εβδομάδα

Θεωρία Ευστάθειας

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}) \quad \Big(\text{ή } \ \mathbf{x}' = \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x})\Big), \tag{0.1}$$

με αρχική συνθήκη

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c},$$

όπου,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$
$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n),$$
$$\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}) = (\Phi_1(t, \mathbf{x}), \dots, \Phi_n(t, \mathbf{x})).$$

Για $n = 2$ αντί x_1, x_2 θα γράφουμε x, y και για $n = 3$ αντί x_1, x_2, x_3 θα γράφουμε x, y, z. Συστήματα στα οποία το δευτερο μέρος εξαρτάται μόνο από το $\mathbf{x}$ ονομάζονται *αυτόνομα.*

Είναι γνωστό ότι στις εφαρμογές οι αρχικές συνθήκες είναι το αποτέλεσμα υπολογισμού στην αρχική στιγμή $t = t_0$ των δεδομένων ενός φυσικού φαινομένου και δεν μπορούν να υπολογιστούν με απόλυτη ακρίβεια. Τα μικρά σφάλματα στον υπολογισμό των αρχικών δεδομένων μπορούν να μας οδηγήσουν σε μια λύση τελείως διαφορετική από εκείνη που ψάχνουμε. Για αυτό είναι σημαντικό να ορίσουμε τις συνθήκες, υπό τις οποίες οι μικρές διαταραχές των αρχικών δεδομένων προκαλούν μικρές διαταραχές της λύσης. Αν το t μεταβάλλεται σε κάποιο πεπερασμένο διάστημα $[t_0, T]$, η απάντηση δίνεται από το θεώρημα *συνεχούς εξάρτησης από τα αρχικά δεδομένα.* Αν το t μπορεί να παίρνει οσοδήποτε μεγάλες τιμές, τότε με αυτά τα προβλήματα ασχολείται η θεωρία της ευστάθειας. Προφανώς εδώ αναφερόμαστε στις λύσεις που υπάρχουν $\forall t > t_0 \geq 0$.

Εδώ θα χρειαστούμε το ανάπτυγμα $Taylor$ πρώτης τάξης:
έστω

$$f(\mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ συνάρτηση, τότε

$$f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{x}_0) h_i + R(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

όπου

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{R(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Εδώ

$$\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \ \ \|\mathbf{h}\| = \sqrt{h_1^2 + ... + h_n^2}.$$

Για $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ τη σχέση αυτή μπορούμε να την γράψουμε σε μορφή

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{0}) x_i + R(\mathbf{x}),$$

όπου
$$\lim_{\mathbf{x}\to 0} \frac{R(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = 0.$$

§1. **Ευστάθεια κατα** *Lyapunov*

Ορισμός. *Η μηδενική λύση του συστήματος (0.1) (εφόσον υπάρχει) ονομάζεται σημείο (ή λύση) ισορροπίας.*

Ορισμός. *Το σημείο ισορροπίας του συστήματος (0.1) ονομάζεται ευσταθές κατά Lyapunov, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, το οποίο εξαρτάται από το ϵ, τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε λύση $\mathbf{x}(t)$ της (0.1), η αρχική τιμή της οποίας ικανοποιεί την*
$$|\mathbf{x}(t_0)| < \delta,$$
η ανισότητα
$$|\mathbf{x}(t)| < \epsilon$$
ικανοποιείται για όλα τα $t \geq t_0$.

Αν όσο μικρό και αν είναι το $\delta > 0$ τουλάχιστον για μια λύση $\mathbf{x}(t)$, που ικανοποιεί την (1.1), δεν ισχύει η (1.2), τότε λέμε ότι το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Ορισμός. *Αν το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές και επιπλέον υπάρχει ένα $\delta_1 > 0$ τ.ω.*
$$\lim_{t\to\infty} |\mathbf{x}(t)| = 0,$$
για κάθε $\mathbf{x}(t)$ με $|\mathbf{x}(t_0)| < \delta_1$, τότε λέμε ότι το σημαίο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Η λύση της (0.1) $\mathbf{x} = \overline{\phi}(t)$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση, που για $n = 2$ μπορεί να θεωρηθεί ως παραμετρική αναπαράσταση μιας καμπύλης στο επίπεδο $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Μπορούμε να την θεωρούμε ως τροχιά ή διαδρομή, που ακολουθείται από ένα κινούμενο σωματίδιο, του οποίου η ταχύτητα καθορίζεται από την διαφορική εξίσωση. Το επίπεδο (x_1, x_2) αποκαλείται *πεδίο φάσεων*, και ένα αντιπροσωπευτικό σύνολο από τροχιές αναφέρεται ως *εικόνα φάσεων*.

Μελέτη της ευστάθειας μιας λύσης $\overline{\phi}(t)$ της (0.1) μπορεί να αναχθεί στην μελέτη της ευστάθειας της μηδενικής (ή τετριμμένης) λύσης. Πράγματι, εισάγουμε τη συνάρτηση
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \overline{\phi}(t),$$
όπου ουσιαστικά η $\mathbf{y}(t)$ είναι η απόκλιση όλων των λύσεων από την λύση $\overline{\phi}(t)$ υπό μελέτη. Για την $\mathbf{y}(t)$ η (0.1) θα πάρει τη μορφή
$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}) \equiv -\frac{d\overline{\phi}}{dt} + \mathbf{\Phi}(t, \mathbf{y} + \overline{\phi}).$$
Είναι προφανές ότι η λύση $\mathbf{y} \equiv 0$ αυτής της εξίσωσης αντιστοιχεί στην $\overline{\phi}(t)$, που είναι λύση της (0.1).

Παρατηρούμε ότι αν το σύστημα είναι γραμμικό, δηλαδή
$$\mathbf{\Phi}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t),$$
τότε
$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{y},$$

αφού

$$-\frac{d\overline{\phi}}{dt} + \Phi(t, \mathbf{y} + \overline{\phi}) = -\mathbf{A}(t)\overline{\phi} - \mathbf{f}(t) + \mathbf{A}(t)(\mathbf{y} + \overline{\phi}) + \mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{y}.$$

Άρα από την ευστάθεια της λύσης $\mathbf{x} = \overline{\phi}(t)$ προκύπτει η ευστάθεια της λύσης $\mathbf{y} \equiv 0$ και αντιστρόφως. Δηλαδή μπορούμε να αντικαταστήσουμε την μελέτη της ευστάθειας της λύσης $\mathbf{x} = \overline{\phi}(t)$ με την μελέτη της ευστάθειας της λύσης ισορροπίας (ή σημείο ισορροπίας ή σταθερό σημείο) $y \equiv 0$.

Παράδειγμα 1.1. Θεωρούμε το εξής σύστημα

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 1 - x_2^2.$$

Εξετάστε την ευστάθεια της λύσης

$$\phi_1(t) = \ln\frac{e^{2t}+1}{2} - t,$$

$$\phi_2(t) = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$$

(η οποία αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες $\phi_1(0), \phi_2(0)) = (0, 0)$).

Λύση. Ανάγουμε τη μελέτη της ευστάθειας αυτής της λύσης του συστήματος στη μελέτη της ευστάθειας της μηδενικής λύσης (ενός άλλου συστήματος).

Εισάγουμε μια καινούργια συνάρτηση

$$(y_1, y_2) = (x_1, x_2) - (\ln\frac{e^{2t}+1}{2} - t, \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}).$$

Προφανώς

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} - \frac{d}{dt}\Big[\ln\frac{e^{2t}+1}{2} - t\Big] = x_2 - \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = y_2$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{dx_1}{dt} - \frac{d}{dt}\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = 1 - x_2^2 - \frac{d}{dt}\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} = -y_2^2 - 2y_2\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}.$$

Έτσι η μελέτη της ευστάθειας της λύσης $\overline{\phi} = (\phi_1, \phi_2)$ του αρχικού συστήματος (1.5) ανάγεται στη μελέτη της ευστάθειας της λύσης $(0,\ 0)$ του συστήματος

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -y_2^2 - 2y\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}.$$

⋆

§2. **Σημεία ισορροπίας γραμμικών συστημάτων**

Θα ασχοληθούμε με την ευστάθεια της λύσης ισορροπίας ενός γραμμικού και ομογενούς συστήματος πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές για $n = 2$. Θεωρούμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

ή

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

και υποθέτουμε προς το παρόν ότι

$$det\mathbf{A} \neq 0$$

(άρα το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbf{A}$). Η ευστάθεια της λύσης ισορροπίας εξαρτάται από τις ιδιοτιμές k του πίνακα $\mathbf{A}$. Αναζητάμε την λύση της (2.1) σε μορφή

$$x(t) = \alpha e^{kt}, \quad y(t) = \beta e^{kt}.$$

Για να προσδιορίσουμε το k, πρέπει να βρούμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0.$$

Η σταθερές α, β προσδιορίζονται από το αλγεβρικό σύστημα (3.3) στο Κεφάλαιο 3, §3. Διακρίνουμε περιπτώσεις με βάση τις ιδιοτιμές.

Περίπτωση 1. *Ομόσημες πραγματικές άνισες ιδιοτιμές.*

Εδώ η γενική λύση έχει τη μορφή

$$x(t) = C_1\alpha_1 e^{k_1 t} + C_2\alpha_2 e^{k_2 t},$$
$$y(t) = C_1\beta_1 e^{k_1 t} + C_2\beta_2 e^{k_2 t},$$

όπου (α_1, β_1), (α_2, β_2) είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις k_1, k_2 αντίστοιχα, C_1, C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Έστω $k_1 < 0$, $k_2 < 0$. Τότε η λύση ισορροπίας $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής και ονομάζεται *κόμβος*.

Ας αποδείξουμε πρώτα την ευστάθεια. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας πάρουμε $t_0 = 0$. Πρέπει για τυχαίο $\varepsilon > 0$ να βρούμε ένα $\delta > 0$ τ.ω. η

$$\sqrt{x^2(0) + y^2(0)} < \delta$$

να συνεπάγεται

$$\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} < \varepsilon, \quad \forall t > 0.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η λύση είναι γραμμικός συνδυασμός των

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{k_1 t} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} e^{k_2 t}$$

αρκεί να αποδειχθεί το παραπάνω για αυτές τις δύο λύσεις. Για $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = \varepsilon$, προφανώς αν

$$\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} < \delta,$$

τότε (αφού $k_i < 0$)

$$\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}\, e^{k_i t} < \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} < \delta = \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Άρα αποδείξαμε την ευστάθεια. Η ασυμπτωτική ευστάθεια προκύπτει επειδεί

$$e^{k_1 t} \to 0, \quad e^{k_2 t} \to 0, \quad \text{καθώς} \ \ t \to +\infty.$$

Έστω τώρα $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Η τροχιές σε αυτή τη περίπτωση έχουν το ίδιο σχήμα με τις τροχιές της προηγούμενης περίπτωσης, αλλά η διεύθυνση κίνησης είναι αντίθετη, δηλαδή οι τροχιές απομακρύνονται από το σημείο ισορροπίας. Και το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές και ονομάζεται *κομβική πηγή*. Για να διαπιστώσουμε ότι όντως έχουμε αστάθεια ας πάρουμε π.χ. τη λύση

$$x(t) = \epsilon\alpha_1 e^{k_1}, \;\; y(t) = \epsilon\beta_1 e^{k_1}, \;\; \epsilon > 0$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0) = \epsilon\alpha_1, \;\; y(0) = \epsilon\beta_1$$

τις οποίες μπορούμε να επιλέξουμε όσο θέλουμε κόντα στο σημείο $(0,0)$ παίρνοντας μικρό ϵ

$$\sqrt{x^2(0) + y^2(0)} = \epsilon\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}.$$

Προφανώς

$$\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \epsilon\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}e^{k_1}t \to +\infty \;\; \text{αν} \;\; t \to +\infty.$$

Συνεπώς το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Περίπτωση 2. *Ετερόσημες πραγματικές ιδιοτιμές.*

Εδώ έχουμε $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. Το σημείο ισορροπίας, καλείται σε αυτή τη περίπτωση *σαγματικό σημείο* και είναι ασταθές αφου

$$e^{k_1 t} \to +\infty \text{ καθώς } t \to +\infty.$$

Περίπτωση 3. *Ίσες ιδιοτιμές.*

Υποθέτουμε ότι $k_1 = k_2 = k$. Αν σε k αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα, τότε η γενική λύση θα πάρει τη μορφή

$$\begin{aligned} x(t) &= (C_1\alpha_1 + C_2(\alpha_1 t + \alpha_\gamma))e^{kt}, \\ y(t) &= (C_1\beta_1 + C_2(\beta_1 t + \beta_\gamma))e^{kt}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

όπου (α_1, β_1) είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, και $(\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$ είναι το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα, που αντιστοιχεί στην επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή .

Επίσης, μπορεί να συμβεί ότι σε διπλή ρίζα k αντιστοιχούν δυο ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε η γενική λύση θα πάρει τη μορφή

$$x(t) = C_1 e^{kt},$$

$$y(t) = C_2 e^{kt}.$$

Στην περίπτωση αυτή το σημείο ισορροπίας ονομάζεται *γνήσιος κόμβος (ή άστρο)*.

Αν $k < 0$, χάρη στον όρο e^{kt}, όλες οι λύσεις τείνουν στο σημείο ισορροπίας, δηλαδή το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Εάν $k > 0$, οι τροχιές θα είναι ίδιες, αλλά η διεύθυνση κίνησης θα έχει την αντίθετη φορά και το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές. Στην περίπτωση (2.2) το σημείο ισορροπίας ονομάζεται *εκφυλισμένος (ή νόθος) κόμβος*.

Περίπτωση 4. *Μιγαδικές τιμές.*

Η ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχουν τη μορφή $k_{1,2} = \lambda + i\mu$, $\mu \neq 0$. Η γενική λύση του συστήματος (2.1) μπορεί να παρασταθεί σε μορφή

$$x(t) = e^{\lambda t}(C_1 \cos\mu t + C_2 \sin\mu t),$$

$$y(t) = e^{\lambda t}(C_1^* \cos\mu t + C_2^* \sin\mu t),$$

όπου C_1, C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές και C_1^*, C_1^* είναι ορισμένοι συνδυασμοί των C_1, C_2.

Είναι προφανές ότι, αν $\lambda < 0$, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Αν $\lambda > 0$, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές. Το σημείο ισορροπίας σε αυτή τη περίπτωση αποκαλείται *σπειροειδές* σημείο (ή *εστία*).

Αν $\lambda = 0$, το σημείο ισορροπίας, το οποίο ονομάζεται *κέντρο*, είναι ευσταθές, αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές (αφού $\cos\mu t$, $\sin\mu t$ δεν τείνουν στο μηδέν καθώς $t \to +\infty$).

Περίπτωση 5.

$$det\mathbf{A} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι το μηδέν είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbf{A}$. Αν είναι απλή ιδιοτιμή, δηλαδή $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, τότε η γενική λύση παίρνει τη μορφή

$$x = C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 e^{k_2 t},$$
$$y = C_1\beta_1 + C_2\beta_2 e^{k_2 t}.$$

Προφανώς, αν $k_2 > 0$ τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές, αν $k_2 < 0$ τότε το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές, όχι όμως ασυμπτωτικά ευσταθές.

Αν το μηδέν είναι διπλή ιδιοτιμή, δηλαδή $k_1 = k_2 = 0$, τότε έχουμε δυο περιπτώσεις:

1. η γενική λύση έχει τη μορφή

$$x = c_1, \quad y = c_2,$$

και το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές (όχι ασυμπτωτικά)

2. η γενική λύση έχει τη μορφή

$$x = C_1 + C_2 t, \quad y = C_1^* + C_2^* t,$$

και το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Αποδείξαμε το εξής:

Θεώρημα 2.1 *Το σημείο ισοροππίας του συστήματος (2.1) είναι*

α.) ασυμπτωτικά ευσταθές, αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$ *έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη,*

β.) ασταθές, αν τουλάχιστον μια ιδιοτιμή έχει θετικό πραγματικό μέρος,

γ.) ευσταθές όχι όμως ασυμπτωτικά, αν το πραγματικό μέρος μιας ιδιοτιμής είναι μηδέν και της άλλης μη θετικό.

Παράδειγμα 2.1. Ταξινομείστε το σημείο ισορροπίας του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = x - y, \quad \frac{dy}{dt} = 2x + 3y. \tag{2.3}$$

Λύση. Η χαρακτηριστική εξίσωση της (2.3) έχει τη μορφή

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow k^2 - 4k + 5 = 0.$$

Η ρίζες είναι οι $k_{1,2} = 2 \pm i$. Επομένως η γενική λύση θα είναι η

$$x = C_1 e^{2t} cost + C_2 e^{2t} sint, \quad y = C_1^* e^{2t} cost + C_2^* e^{2t} sint.$$

Λόγω της παρουσίας του όρου e^{2t}, θα έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty. \tag{2.4}$$

Από την (2.4) προκύπτει ότι το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές σπειροειδές σημείο.

Παράδειγμα 2.2. Θεωρούμε την εξίσωση

$$x'' = -a^2 x - 2bx',$$

η οποία περιγράφει τις ελαστικές ταλαντώσεις με απόσβεση. Εδώ $2b$ είναι ο λεγόμενος συντελεστής απόσβεσης. Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας.

Λύση. Ανάγουμε την εξίσωση αυτή σε ένα σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης, θέτοντας $x' = y$, καταλήγουμε στο σύστημα

$$x' = y, \quad y' = -a^2 x - 2by. \tag{2.5}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στην (2.5) είναι η

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -a^2 & -2b-k \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow k^2 + 2bk + a^2 = 0 \Longrightarrow k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Έχουμε διάφορες περιπτώσεις, αναλόγως των b και a

1. $b = 0$, ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση, $k_{1,2} = \sqrt{-a^2} = \pm ia$. Όλες οι τροχιές είναι περιοδικές. Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές (κέντρο).

2. $b > 0$, $b^2 - a^2 \geq 0$. Αρα $-b \pm \sqrt{b^2 - a^2} < 0$, επομένως το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (κόμβος).

3. $b < 0$, $b^2 - a^2 < 0$. Το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές σπειροειδές σημείο.

4. $b < 0$, $b^2 - a^2 \geq 0$. Το σημείο ισορροπίας είναι ασταθής κόμβος (κομβική πηγή).

5. $b > 0$, $b^2 - a^2 < 0$. Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές σπειροειδές σημείο. ⋆

Παρομίως μελετάμε και την περίπτωση $n > 2$.

Παράδειγμα 2.3. Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας του σύστήματος

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x + 2y + z \\ z' = 3y - z. \end{cases}$$

Λύση. Οι ιδιοτημές του πίνακα $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$ και η γενική λύση θα είναι

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Θεωρούμε μια λύση η οποία ξεκινάει από το σημείο

$$x(0) = \gamma, \;\; y(0) = 4\gamma, \;\; z(0) = 3\gamma, \tag{2.7}$$

όπου το γ είναι όσο θέλουμε μικρό. Ευκολά διαπιστώνουμε ότι η (μερική) λύση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες (2.7) είναι η

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} \;\; \text{ή} \;\; x(t) = \gamma e^{3t}, \;\; y(t) = 4\gamma e^{3t}, \;\; z(t) = 3\gamma e^{3t}.$$

Προφανώς η λύση αυτή απειρίζεται καθώς το t τείνει στο άπειρο. Δηλαδή η λύση που ξεκινάει από ένα σημείο το οποίο βρίσκεται όσο θέλουμε κοντά στο $(0,0,0)$ τείνει στο άπειρο, άρα δεν έχουμε ευστάθεια. $\star$

Γενικά για γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} \text{ πίνακας } n \times n, \tag{2.6}$$

ισχεί το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2 *Το σημείο ισορροπίας του συστήματος (2.6) είναι*

α.) ασυμπτωτικά ευσταθές, αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του πίναικα $\mathbf{A}$ *έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη,*

β.) ευσταθές, αν υπάρχουν απλές ιδιοτιμές με μηδέν πραγματικό μέρος (δηλαδή $\pm i\mu$, $\mu \in \mathbf{R}$*) και οι υπόλοιπες έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος,*

γ.) ασταθές, αν τουλάχιστον μια ιδιοτιμή έχει θετικό πραγματικό μέρος ή αν οι φανταστικές ιδιοτιμές δεν είναι απλές.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι παρόμοια με την απόδειξη το Θεωρήματος 2.1, δηλαδή, βρίσκουμε τη γενική λύση και βάσει αυτής εξάγουμε συμπεράσματα. Η γενική λύση είναι γραμμικός συνδυασμός των (διανυσματικών) συναρτήσεων της μορφής

$$V_j t^{m_j-1} e^{\lambda_j t} \sin \mu_j t \;\text{ ή }\; V_j t^{m_j-1} e^{\lambda_j t} \sin \mu_j t,$$

όπου $\lambda_j \pm i\mu_j$ ιδιοτιμή του πίνακα $\mathbf{A}$ πολλαπλότητας m_j και V_j διάνυσμα στον $\mathbf{R}^n$. Αν η ιδιοτιμή είναι απλή, τότε $m_j = 1$, αν είναι διπλή, τότε $m_j = 2, \dots$.

Η περίπτωση όπου οι συντελεστές του πίνακα είναι συναρτήσεις ($a_{ij} = a_{ij}(t)$) εν γένει είναι αρκετά πιο πολύπλοκη.